数理解析研究所講究録
357巻 1979年 97-124

定数係数の方程式に対する C^∞-Goursat問題について

京大 理(研修員) 長谷川幸子

§1. 解析関数のクラスにおけるGoursat問題は，今までに何人かの先人によって，かなり詳しく研究されているが，C^∞クラスにおけるこの種の問題は(筆者の知るかぎり)一般的には今まで殆んど取り扱う方法がなかった。この問題を解析する手法を提供し，問題の本質(特にCauchy問題との相違)を明らかにしたいと思う。ここでは定数係数で，初期面が一重特性面である場合についての考察をする。次の定係数偏微分作用素を考えよう。

$$(1.1)\qquad P(\partial_t,\partial_x,\partial_y)=\sum_{i+j+|\alpha|\leq m} a_{ij\alpha}\,\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^\alpha$$

ここで $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$, $t\in R^1_+$, $x\in R^1$, $y\in R^\ell$.
最高階(m階)の項を P_m, $m-1$階の項を P_{m-1} 残りを R_{m-2} とすれば，Pは次のようにあらわせる。

$$(1.2)\qquad P=P_m+P_{m-1}+R_{m-2}.$$

ここで P_m に対して次の仮定をおこう。

仮定1　$t=0$は一重特性面である。即ち

$$a_{m,0,0}=0 \quad かつ \quad |a_{m-1,1,0}|+\sum_{|\alpha|=1}|a_{m-1,0,\alpha}| \neq 0.$$

仮定2　$\partial_t^{m-1}\partial_x$の係数；$a_{m-1,1,0}\neq 0$.

上の２つの仮定の下で、次の問題（Goursat問題）を$\mathcal{E}_{t,x,y}$の範ちゅうで考える。

$$(1.3)\quad P(\partial_t,\partial_x,\partial_y)u(t,x,y)=f(t,x,y)\in\mathcal{E}_{t,x,y}(t\geq 0),$$

$$(1.4)\quad \begin{cases}\partial_t^i u(0,x,y)=u_i(x,y)\in\mathcal{E}_{x,y}, & 0\leq i\leq m-2\\ u(t,0,y)=\varphi(t,y)\in\mathcal{E}_{t,y} & (t\geq 0).\end{cases}$$

ここで$\{u_i(x,y)\}_{0\leq i\leq m-2}$と$\varphi(t,y)$との間には、次の関係式（いわゆるcompatibility条件）がなりたっているとする。

$$(1.5)\quad \partial_t^i\varphi(0,y)=u_i(0,y) \qquad 0\leq i\leq m-2.$$

定義　Goursat問題が$\mathcal{E}$-wellposedであるとは、任意の$\{u_i\}_{0\leq i\leq m-2}$, $\varphi(t,y)$, $f(t,x,y)$に対して、(1.3), (1.4)を満足する$u(t,x,y)$が$\mathcal{E}_{t,x,y}$の中に一意的に存在することである。

Banachのclosed graph theoremにより、$\mathcal{E}$-wellposedであれば、線形写像$(\{u_i\},\varphi,f)\longrightarrow u$は、$\prod^{m-2}\mathcal{E}_{x,y}\times\mathcal{E}_{t,y}\times\mathcal{E}_{t,x,y}$から$\mathcal{E}_{t,x,y}$の中への連続写像になる。

さらに次の仮定をおく（§6参照）。

仮定3　$P_m(\tau,\xi,\eta)$と$P_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$の係数は実数である。

我々の得た結果は次のようなものである。

(1.6) $P_m(\tau,\xi,\eta) = b_1(\xi,\eta)\tau^{m-1} + b_2(\xi,\eta)\tau^{m-2} + \cdots + b_m(\xi,\eta)$

とおこう。$b_1(\xi,\eta) \neq 0$ のとき，P_m は τ の $m-1$ 次の多項式である。このとき，(1.1) の特性方程式 $P_m(\tau,\xi,\eta)=0$ の根を(1.1)の特性根といい，$\tau_i(\xi,\eta)$ $1 \leq i \leq m-1$ であらわそう。

<u>定理1</u>　Goursat 問題 (1.3)，(1.4) が $\mathcal{E}$-wellposed であるならば，$(\xi,\eta) \in R^1 \times R^\ell$ に対して，特性根 $\tau_i(\xi,\eta)$ は，全て実数である。

この定理は，双曲型方程式の Cauchy 問題に対する結果と類似である。しかし次の定理は Goursat 問題固有の性質であると思われる。

<u>定理2</u>　Goursat 問題が $\mathcal{E}$-wellposed であるならば，$P_m(\tau,\xi,\eta)$ は $b_1(\xi,\eta)$ で割りきれなければならない。即ち

(1.7) $P_m(\tau,\xi,\eta) = b_1(\xi,\eta)\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$，

ここで $\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$ は $m-1$ 次同次多項式である。

次に低階の部分 P_{m-1} に対する制約をのべる。仮定1，2，3の他にさらに次の仮定をおこう。

<u>仮定4</u>　$\mathring{Q}_{m-1}(\partial_t,\partial_x,\partial_y)$ は t 方向に強双曲型である。即ち，$\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)=0$ の根 $\tau=\tau_i(\xi,\eta)$ は，$(\xi,\eta) \in R^1 \times R^\ell$ に対して，全て実でかつ相異なる。

<u>定理3</u>　仮定1〜4の下で，Goursat 問題が $\mathcal{E}$-wellposed であるならば，P_{m-1} は次の形でなければならない。

(1.8) $P_{m-1}(\tau,\xi,\eta) = c\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$,
ここで c は定数. Q_{m-1} は, (τ,ξ,η) の $m-2$ 次同次多項式.

この定理は, 双曲型方程式の Cauchy 問題の Levi 条件に類似のものである。Cauchy 問題では, 特性根が重根になってはじめて Levi 条件が登場したが, Goursat問題では, 特性根が単根であっても, このような条件がでてくるところは, 私には興味深く思われる。十分条件については次の結果を得た。

<u>定理4</u> 仮定1〜4の下で, P_m, P_{m-1} が上の3つの定理の条件をみたしているならば, 即ち

$$P = b_1(\xi,\eta)\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + c\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta) + R_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$$

ならば, Goursat 問題は $\mathcal{E}$-wellposed である。

<u>注意1</u> 方程式(1.3)は一般性を失うことなく次の形であると考えてよい。

(1.3)' $\displaystyle \partial_t^{m-1}\partial_x u + \sum_{\substack{i+j+|\alpha|\le m \\ i\le m-2}} a_{ij\alpha}\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^\alpha u = f.$

実際, P_m の中で ∂_t^{m-1} なる項を含むものを $(a_0\partial_x + \sum_{j=1}^{\ell} a_j\partial_{y_j})\partial_t^{m-1}$ であらわして, 独立変数変換（仮定2, 3より可能である）

$$x' = \frac{1}{a_0}x, \quad y_j' = y_j - \frac{a_j}{a_0}x \qquad j=1,2,\cdots \ell$$

を行なえば,

$$\partial_x = \frac{1}{a_0}\partial_{x'} - \frac{1}{a_0}\sum a_j\partial_{y_j'}, \quad \partial_{y_j} = \partial_{y_j'}$$

であるから, $a_0\partial_x + \sum a_j\partial_{y_j} = \partial_{x'}$ がしたがう。次に(1.3)

の ∂_t^{m-1} の係数を C として, $u=e^{-cx'}\tilde{u}$ なる未知関数変換を行なう。すると $\partial_t^{m-1}\tilde{u}$ の係数は 0 になる。上の変換で, Goursat data を与える超平面 $t=0$ は不変であるし, $x=0$ は $x'=0$ に変換される。x', y' を改めて x, y とかけば, (1.3)' が得られる。

§2. 定理1の証明.

証明の方法は Mizohata [1] にしたがう。記述を簡略にするために, 記号を少し変えよう。$x, y_1, \cdots y_\ell$ の代りに x_1, $x_2, \cdots, x_\ell, x_{\ell+1}$ とかこう。注意1より,

$$(2.1)\quad P=\partial_t^{m-1}\partial_{x_1}+\sum_{\substack{i+|\alpha|\leq m\\ i\leq m-2}}\partial_t^i\partial_x^\alpha \quad \text{と考えてよい。}$$

$$P(\partial_t,\partial_x)=P_m(\partial_t,\partial_x)+R_{m-1}(\partial_t,\partial_x)$$

とかこう。Goursat問題が $\mathcal{E}$-well posed であってかつ実数でないような特性根があるとしよう。もう少し詳しく云えば, $R^{\ell+1}$ の点 ξ^0 (その第一座標 $\xi_1^0\neq 0$ であるような) があって, $P_m(\tau,\xi^0)=0$ が $\operatorname{Im}\tau_1(\xi^0)\neq 0$ であるような根 $\tau=\tau_1(\xi^0)$ をもつとしよう。必要あらば, ξ^0 を $-\xi^0$ でおきかえることにより,

$$(2.2)\qquad \operatorname{Im}\tau_1(\xi^0)<0 \qquad (|\xi^0|=1,\ \xi_1^0\neq 0)$$

であるとしてよい。さて $P[u]=0$ をみたす u を評価しよう。そのために, x 空間と, ξ 空間の両方で局所化を行なう。先

ず $\beta(x)\in C_0^\infty$ をとろう。$0\le\beta(x)\le 1$ でありかつ原点の近傍で，$\beta(x)\equiv 1$ であるとする。$\beta(x)$ を $Pu=0$ に作用さす。

(2.3) $\quad P[\beta u] = [P,\beta]u.$

次に $d(\xi)\in C_0^\infty$ として，次の条件をみたすものをとる。

$\mathrm{supp}\, d(\xi)$ は ξ^0 の小さな近傍にふくまれる。さらに $0\le d(\xi)\le 1$，ξ^0 のある近傍で $d(\xi)\equiv 1$ かつ $d(\xi)$ の support 上で $\xi_1\neq 0$.

$$d_n(\xi) = d\left(\frac{\xi}{n}\right)$$

とおこう。$d_n(D)$ を次で定義する。

$$d_n(D)\,u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(d_n(\xi)\,\hat{u}(\xi)\right], \quad u\in\mathcal{S}'.$$

この $d_n(D)$ を (2.3) に作用さす。P は定数係数であるから，

(2.4) $\quad P[d_n\beta u] = d_n[P,\beta]u.$

$P=P_m+R_{m-1}$ であったから，

(2.5) $\quad P_m[d_n\beta u] = d_n[P,\beta]u - R_{m-1}[d_n\beta u].$

(2.1) より P_m はつぎのような形をしている。

(2.6) $\quad P_m(\partial_t,\partial_x) = \partial_{x_1}\partial_t^{m-1} + \sum_{j=2}^{m} q_j(\partial_x)\partial_t^{m-j}.$

ここで $q_j(\xi)$ は，ξ に関する j 次同次式である。$d_n(\xi)$ の support の上で，$\xi_1\neq 0$ を考慮して，作用素 $(i\xi_1)^{-1}(D)$ をつぎの式で定義する。

$$(i\xi_1)^{-1}(D)(d_n v) = \mathcal{F}^{-1}\left[(i\xi_1)^{-1}d_n(\xi)\,V(\xi)\right].$$

明らかに $(i\xi_1)^{-1}(D)$ は ∂_{x_1} の逆である。即ち

$$(i\xi_1)^{-1}(D)\,\partial_{x_1}(d_n v) = \partial_{x_1}(i\xi_1)^{-1}(D)(d_n v) = d_n v.$$

この $(i\xi_1)^{-1}(D)$ を (2.5) 式に作用さすと ((2.6) を考慮すれば) つぎの式が得られる。

$$(2.7)\quad \Big[\partial_t^{m-1}+\sum_{j=2}^{m}(i\xi_1)^{-1}(D)\,q_j(\partial_x)\partial_t^{m-j}\Big](d_n\beta u)$$
$$=(i\xi_1)^{-1}(D)\big\{d_n[P,\beta]u-R_{m-1}[d_n\beta u]\big\}.$$

$t=0$ は, (2.7) 式では, もはや特性面ではない。(2.7) 式左辺の特性方程式は,

$$\tau^{m-1}+\sum_{j=2}^{m}(i\xi_1)^{-1}q_j(i\xi)\,\tau^{m-j}\equiv(i\xi_1)^{-1}P_m(\tau,i\xi)=0.$$

この方程式の $\xi=\xi^0$ における根を $\tau_1^0,\tau_2^0,\cdots,\tau_{m-1}^0$ とおこう。(2.2) より次の式がなりたつとしてよい ([1] p.116 参照).

$$(2.8)\quad\begin{cases}\mathrm{Re}\,\tau_i^0-\varepsilon\geqq 3\delta, & 1\leqq i\leqq N_1,\\ \mathrm{Re}\,\tau_j^0-\varepsilon\leqq -3\delta, & N_1+1\leqq j\leqq m-1.\end{cases}$$

(2.7) 式を t 方向の双曲型方程式とみる場合, 右辺に ∂_t^{m-1} という項があると, それは [1] と同じ方法では取り扱えない。

<u>$\partial_t^{m-1}(d_n\beta_x u)$ の表現</u>

ここで (2.7) 式の右辺で ∂_t^{m-1} をふくんでいる項: $(i\xi_1)^{-1}(D)\cdot\{d_n[P,\beta]u\}$ に注目しよう.

$$[P,\beta]u=-\sum_{|\nu|\geqq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}[\beta^{(\nu)}u]$$

であるから

$$(i\xi_1)^{-1}(D)\{d_n[P,\beta]u\}$$
$$=(i\xi_1)^{-1}(D)\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\partial P}{\partial\xi_j}(\partial_t,\partial_x)(d_n\partial_{x_j}\beta\cdot u)$$
$$-(i\xi_1)^{-1}(D)\sum_{|\nu|\geqq 2}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}(\partial_t,\partial_x)(d_n\partial_x^{\nu}\beta\cdot u).$$

$P(\partial_t,\partial_x)$の中で∂_t^{m-1}という項をふくんでいるのは，$\partial_t^{m-1}\partial_{x_1}$という項だけである。よって上の式は次のように書ける。

$(i\xi_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}\beta\cdot u)+\sum_{|\nu|\geq 1}{}' C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\beta\cdot u)$

$C_\nu(\partial_t,D)$はtに関しては微分，xに関しては擬微分作用素で，その order は $m-|\nu|-1$ である。そして，tに関する order は $m-2$ 以下である。記述の都合上，

$$(i\xi_1)^{-1}P(\alpha_n\beta u)\equiv\left[\partial_t^{m-1}+C_0(\partial_t,D)\right](\alpha_n\beta u)$$

であらわそう。C_0はC_νと同じ性質をもつ。これを使って，(2.7)式は次のように書きあらわすことができる。

$$(2.9)\quad \partial_t^{m-1}(\alpha_n\beta u)=(i\xi_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}\beta\cdot u)+\sum_{|\nu|\geq 0}{}' C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\beta\cdot u).$$

ここでC_νの order は，$m-1-|\nu|$である．(2.9)でβの代りに$\partial_{x_1}\beta\ (\equiv\beta_{x_1})$を代入した式は

$$(2.10)\quad \partial_t^{m-1}(\alpha_n\beta_{x_1}u)=(i\xi_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}^2\beta\cdot u)+\sum_{|\nu|\geq 0}{}' C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\partial_{x_1}\beta\cdot u).$$

(2.10)を(2.9)に代入する。

$$(2.11)\quad \partial_t^{m-1}(\alpha_n\beta u)=\{(i\xi_1)^{-1}(D)\}^2\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}^2\beta\cdot u)+(i\xi_1)^{-1}(D)\sum_{|\nu|\geq 0}{}' C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\partial_{x_1}\beta\cdot u)+\sum_{|\nu|\geq 0}{}' C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\beta\cdot u)$$

この操作をくりかえせば，任意の正の整数kに対して，つぎの式が得られる。

$$(2.12)\quad \partial_t^{m-1}(d_n\beta u) = ((i\xi_1)^{-1})^{k}\partial_t^{m-1}(d_n\partial_{x_1}^{k}\beta\cdot u) + \sum_{s=0}^{k}\{(i\xi_1)^{-1}\}^{s}\sum_{|\nu|\geq 0}' C_\nu(\partial_t, D)(d_n\partial_x^{\nu}\partial_{x_1}^{s}\beta\cdot u).$$

つぎに方程式の解を下から評価しよう。

<u>不等式</u>

(2.7)式を system に直そう。(2.7)の右辺を f とおくと、

$$(2.7)'\quad \left[\partial_t^{m-1} + \sum_{j=2}^{m}(i\xi_1)^{-1}(D)\,g_j(\partial_x)\,\partial_t^{m-j}\right][d_n\beta u] = f.$$

$$U = {}^t\left((\Lambda+1)^{m-2}(\beta u),\ (\Lambda+1)^{m-3}\partial_t(\beta u),\ \cdots,\ \partial_t^{m-2}(\beta u)\right) \equiv E(\Lambda,\partial_t)(\beta u)$$

とおけば、(2.7)′ はつぎのようにかける。

$$(2.13)\quad \partial_t(d_n U) = H\Lambda d_n U + B d_n U + F.$$

ここで $F = {}^t(0,\cdots,0,f)$, B は L^2 の有界作用素。

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots \quad 1 \\ h_{m-1} & \cdots & & h_2 \quad h_1 \end{pmatrix}$$

ここで $h_j(\xi) = |\xi|^{-j}g_{j+1}(i\xi)/(i\xi_1)$. $H(\xi)$ は ξ に関して、0次同次である。H の定義より、

$$\det(\tau I - H(\xi)) = (i\xi_1)^{-1}P_m(\tau, i\xi),\quad \xi_1 \neq 0.$$

[1] p.117 と同様にして、つぎのような non singular matrix N_0 が存在する。

$$N_0 H(\xi^0) N_0^{-1} = \begin{pmatrix} \mathring{\tau}_1 & & 0 \\ & \mathring{\tau}_2 & \\ \mathring{q}_{ij} & & \ddots \quad \mathring{\tau}_{m-1} \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_0$$

ここで $|a_{ij}| \leq \frac{\delta}{4m}$,（δは(2.8)式にあらわれたもの）.

(2.13) に N_0を作用させると、つぎのようになる。

$$(2.14)\quad \partial_t d_m(N_0 U) = [\mathcal{Q}_0 + N_0\{H - H(\xi^0)\}N_0^{-1}]\Lambda d_m(N_0 U)$$
$$+ N_0 B N_0^{-1}(d_m N_0 U) + N_0 F .$$

$$N_0\{H(\xi) - H(\xi^0)\}N_0^{-1} = \mathcal{Q}_\varepsilon(\xi) = (\ a_{ij}^{(\varepsilon)}(\xi))_{1\leq i,j\leq m-1}$$

とおこう．ξ^0の近傍 V_{ξ^0} を十分小さくとれば、任意の $\xi \in V_{\xi^0}$ に対して $|a_{ij}^{(\varepsilon)}(\xi)| \leq \frac{\delta}{4m}$ になる．$\mathrm{supp}[d] \subset V_{\xi^0}$ となるように $d(\xi)$をとろう．

$$\exp(-\varepsilon\Lambda t)N_0 d_m U = V^{(m)} = {}^t(V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \cdots V_{m-1}^{(m)})$$

とおけば，(2.14) はつぎのようになる。

$$\partial_t V^{(m)} = (\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_\varepsilon - \varepsilon)\Lambda V^{(m)} + N_0 B N_0^{-1} V^{(m)}$$
$$+ \exp(-\varepsilon\Lambda t) N_0 F .$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_1} \| V_i^{(m)}\|^2 - \sum_{j=N_1+1}^{m-1} \|V_j^{(m)}\|^2$$

とおこう。ここで$\|\cdot\|$は、x空間のL^2-norm である。$d(\xi)$ の support を十分小にとれば、つぎの式が得られる。

$$\frac{d}{dt}S(t) \geqq \delta m \| V^{(m)}\|^2 - C \| V^{(m)}\| \cdot \| \tilde{F} \|$$
$$\geqq \delta' m \| V^{(m)}\|^2 - \frac{C'}{m}\|\tilde{F}\|^2 .$$

ここで，δ'，C' はmに無関係な正の定数．$\tilde{F} = \exp(-\varepsilon\Lambda t)N_0 F$.

結局次の式を得る

$$(2.16)\quad S'(t) \geqq \delta' m \| V^{(m)}\|^2 - \frac{C}{m}\|\exp(-\varepsilon\Lambda t) f\|^2 .$$

Cはmに無関係な定数.

定理1の証明

(2.1)が$\mathcal{E}$-wellposedとする。はじめにGoursat問題の解の列を定義しよう。即ちGoursat dataの列を定義しよう。$\hat{\varphi}(\xi)$をC^∞関数で、そのsupportはξ^0の小さな近傍にふくまれるとする。さらに$\hat{\varphi}(\xi)$のsupport上で$d(\xi)=1$かつ$\int|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi=1$とする。$\varphi_{n+1}$を、つぎの式で定義する。

$$(2.17)\quad \hat{\varphi}_{n+1}(\xi)=\hat{\varphi}(\xi-n\xi^0)$$

すなわち

$$(2.18)\quad \varphi_{n+1}(x)=\exp(in\xi^0 x)\varphi(x).$$

つぎのGoursat dataを満足するような$Pu=0$の解を$u_n(t,x)$とする。

$$(2.19)\quad \begin{cases} N\circ E(\Lambda,\partial_t)u_n(0,x)={}^t(\varphi_n(x),0\cdots 0) \\ u_n(t,0,x')=\varphi_n(t,x')=\sum_{i=0}^{m-2}\partial_t^i u_n(0,0,x')\,t^i/i! \end{cases}$$

(2.19)は明らかにcompatibility条件をみたす。(2.19)は、つぎのようにも書ける。

$$(2.20)\quad \begin{cases} \partial_t^i u_n(0,x)=\mathcal{F}^{-1}\left(c_i\varphi_n(\xi)/(|\xi|+1)^{m-2-i}\right) & 0\leq i\leq m-2 \\ u_n(t,0,x')=\varphi_n(t,x'). \end{cases}$$

[1] p.119と同様の計算で、

$$(2.21)\quad \|d_m N\circ E(\Lambda,\partial_t)\beta u(0,x)\|=c+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

をうる。ここで、cは正の定数。

さて、(2.7)式で、$u=u_n(t,x)$とおこう。$\mathcal{E}$-wellposedの仮定

から，正の整数kと，x空間における0の近傍Ωと，$T'(>0)$が存在して，

$$(2.22)\quad \max_{x\in\Omega}\left|\partial_t^i u_n(x,t)\right| \leq O(n^k),\quad \begin{matrix}0\leq i\leq m-1\\ 0\leq t\leq T'\end{matrix}$$

がなりたつ。ここで$\beta(x)$の support を小さくとって，$\mathrm{supp}\,\beta(x)\subset\Omega$ とすれば，

$$(2.23)\quad \|\beta(x)\partial_t^i u_n(t,x)\|\leq O(n^k),\quad \begin{matrix}0\leq i\leq m-1\\ 0\leq t\leq T'\end{matrix}$$

がなりたつ。

(2.7) の右辺にあらわれてくる $(i\xi_1)^{-1}(D)d_n\partial_{x_1}\beta\partial_t^{m-1}u_n$ なる項は，[1]ではあらわれなかった項である。この項については，(2.12)式を用いる。(2.23) より，

$$\|(i\xi_1)^{-k}\partial_t^{m-1}(d_n\,\partial_{x_1}^k\beta\cdot u_n)\|\leq C\ (\text{定数})$$

であるから，(2.12) で $k=k$ ととれば，$\partial_t^{m-1}(d_n\beta u_n)$ は，Cauchy 問題のときにあらわれるような項と，L^2-norm で有界(nに関して)な項との和であらわすことができる。こうしておけば，[1] と同じ取り扱いができて，

$$(2.24)\quad S_n(t)\geq C\exp\left(\frac{\delta'}{2}nt\right)-O\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る。$S_n(t)$ の定義については[1] p124 を参照。一方 $\mathcal{E}$-well posed の仮定から，$S_n(t)$ は，nに関して多項式の order でなければならない。これは (2.24) に矛盾する。

§3. 定理2の証明.

方程式(1.3)'を考えよう。はじめに $y\in R^1$ のときについて定理2を証明する。このとき(1.3)'で $f=0$ とおいた式はつぎのようになる。

(3.1) $\partial_t^{m-1}\partial_x u = \sum_{\substack{i+j+k\le m \\ i\le m-2}} a_{ijk}\,\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^k u.$

定理2の主張は, $\mathcal{E}$-well posedならば, $a_{m-i,0,i}=0,\ 2\le i\le m$.
はじめに証明の概略をのべよう。先ず $a_{m-2,0,2}=0$ を示す。詳しく云えば, $\mathcal{E}$-well posedと $a_{m-2,0,2}\neq 0$ を仮定して, (3.1)の解の列で, Goursat dataから, 解への連続性がなりたゝないようなものを構成する。次に $a_{m-i,0,i}=0\ (3\le i\le m)$ を次の方法で示す。即ち $a_{m-2,0,2}=0$ かつ $\sum_{i=3}^{m}|a_{m-i,0,i}|\neq 0$ とすれば, 特性多項式 $P_m(\tau,\xi,\eta)=0$ が虚根をもつことが示され, 定理1より, $\mathcal{E}$-well posed であることに反する。
前記後半の証明は簡単であるので(詳しくは[3]参照)ここでは前半の部分の証明をしようと思う。(3.1)で $u=e^{i\eta y}v(t,x)$ とおこう。η は実数とする。$v(t,x)$ のみたすべき方程式は,

(3.2) $\partial_t^{m-1}\partial_x v(t,x)$

$$= \left[a_{m-2,0,2}(i\eta)^2 + a_{m-2,0,1}(i\eta) + a_{m-2,0,0}\right]\partial_t^{m-2}v$$
$$+ \left(a_{m-2,2,0}\partial_x^2 + a_{m-2,1,1}(i\eta)\partial_x + a_{m-2,1,0}\partial_x\right)\partial_t^{m-2}v$$
$$+ \sum_{i\le m-3} a_{ijk}(i\eta)^k\partial_t^i\partial_x^j v.$$

必要ならば, x を $-x$ に変換することにより, $a_{m-2,0,2}<0$

であると仮定できる。(3.2)式右辺の第一項を $(a\eta^2+ib\eta+c)\partial_t^{m-2}V$, $(a>0)$ と書こう。$\eta>0$ で $+\infty$ にとばした時の(3.2)の解の挙動をみよう。そのため,

$$\zeta=\sqrt{a\eta^2+ib\eta+c}\ ,\quad \mathrm{Re}\,\zeta>0$$

とおこう。$\eta\longrightarrow+\infty$ のとき,

$$\zeta=\sqrt{a}\,\eta+i\frac{b}{2\sqrt{a}}+O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

になる。これより,

$$|\zeta|=\zeta+O\left(\frac{1}{\eta}\right)=\zeta+O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)$$

がしたがう。さて,(3.2)の解で,次のようなGoursat data をみたすものを考えよう。

$$(3.3)\quad\begin{cases}\partial_t^i V(0,x)=0 & 0\leq i\leq m-3\\ \partial_t^{m-2}V(0,x)=1\\ V(t,0)=t^{m-2}/(m-2)!\end{cases}.$$

(3.3)の第一式より,

$$(3.4)\qquad V(t,x)=\sum_{p\geq0,\,q\geq0}V_{pq}\frac{t^{m-2+p}}{(m-2+p)!}\cdot\frac{x^q}{q!}$$

とおこう。第2,第3式より

$$(3.5)\qquad V_{00}=1,\quad V_{0,q}=0\quad q\geq1,\quad V_{p,0}=0\quad p\geq1$$

がしたがう。(3.4)を(3.2)に代入して,両辺の $t^r x^s$ の係数をくらべれば,つぎの式が得られる。

$$(3.6)\quad V_{r+1,s+1}=\zeta^2V_{r,s}+\left(a_{m-2,2,0}V_{r,s+2}+a_{m-2,1,1}(i\eta)V_{r,s+1}\right.$$
$$\left.+a_{m-2,1,0}V_{r,s+1}\right)+\sum_{i\leq m-3}a_{ijk}(i\eta)^kV_{r+i-(m-2),s+j}\ .$$

(3.5) と (3.6) より $v_{p,q}$ は一意的に決まる。特に Goursat data の形から、ただちに

(3.7) $v_{pp} = \zeta^{2p} \quad p \geq 0, \quad v_{p,q} = 0 \quad q > p$

が得られる。次に η が大きい時の v_{pq} ($q<p$) を評価しよう。

$\eta <$ const. $|\zeta|$ を考慮すれば、

(3.8) $|v_{r,s}| \leq \frac{r!}{s!}|\zeta|^{2s}(C|\zeta|)^{r-s}, \quad s \leq r$

が得られる。証明は、数学的帰納法による。[3] 参照。さて、

$\partial_t^{m-2} v = \sum_{p,q} \frac{t^p}{p!}\frac{x^q}{q!} v_{pq}$ を下から評価しよう。$t, x \geq 0$ として、右辺の和を、$p=q$ の部分と $p \neq q$ の部分にわけておいて、($v_{p,q} = 0 \quad q > 0$ であるから) (3.8) を使えば、

$$|\partial_t^{m-2} v(t,x;\eta)| \geq \left|\sum_{p\geq 0} v_{pp}\frac{t^p x^p}{(p!)^2}\right| - \left|\sum_{q<p} v_{pq}\frac{t^p x^q}{p!\,q!}\right|$$

$$\geq \left|\sum_{p\geq 0} v_{pp}\frac{(tx)^p}{(p!)^2}\right| - \sum_{q<p} t^p \frac{x^q}{(q!)^2}|\zeta|^{2q}(C|\zeta|)^{p-q}.$$

上式の第2項は、

$$\sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}x^q \sum_{p;\,p>q} t^p (C|\zeta|)^{p-q}$$

$$= \sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2} x^q t^q \sum_{j\geq 1}(C|\zeta|)^j t^j$$

であるから、結局次の評価が得られる。

(3.9) $$|\partial_t^{m-2} v(t,x;\eta)| \geq \sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}(xt)^q\Big\{1 - \sum_{j\geq 1}(C|\zeta|)^j t^j\Big\}$$
$$- \Big\{\sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}(xt)^q - \sum_{q\geq 0}\frac{\zeta^{2q}}{(q!)^2}(xt)^q\Big\}.$$

Bessel 関数の性質を用いれば（[3] 参照）

(3.10) $\left|\partial_t^{m-1} v(t_3, x_0; \eta)\right| \geq \exp(\delta' \sqrt{|\zeta|})$ $(0<\delta'<\delta)$

が得られる。ここで $t_3 = \dfrac{1}{3C|\zeta|}$，$x_0$ は正で固定されたものである。さて，$u = e^{i\eta y} v(t, x)$ であったから，(3.3) より

$$(3.11)\quad \begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = 0 & 0 \leq i \leq m-3 \\ \partial_t^{m-2} u(0, x, y) = e^{i\eta y} \\ u(t, 0, y) = e^{i\eta y} t^{m-2}/(m-2)! \end{cases}.$$

$\mathcal{E}$-wellposed の仮定より，$\partial_t^{m-2} u(t, x, y)$ は $\eta \longrightarrow +\infty$ のとき，η の，したがって $|\zeta|$ の多項式 order をもつ。一方 (3.10) より，$\partial_t^{m-2} u(t_3, x_0, y)$ は $|\zeta|$ の exponential order をもっている。これは矛盾である。

最後に $y \in R^l$ のときを考えよう。(1.3)′ で $f=0$ とおいた式は次のようになる。

$$(3.12)\quad \partial_t^{m-1} \partial_x u = \sum_{\substack{i+j+|\alpha| \leq m \\ i \leq m-2}} a_{ij\alpha}\, \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^\alpha u .$$

定理 2 の主張は，$\mathcal{E}$-wellposed ならば，$\sum_{|\alpha|=i} |a_{m-i,0,\alpha}| = 0$，$2 \leq i \leq m$。もし $\sum_{|\alpha|=i} |a_{m-i,0,\alpha}| \neq 0$ であれば，適当な独立変数変換により，$\partial_t^{m-i} \partial_{y_1}^i$ の係数が 0 ではないようにできる。$u = u(t, x, y_1)$ として $y_2 \cdots y_l$ には頼らないような解を考えれば，$l=1$ の場合に帰着できる。$i = 3, \cdots, m$ の場合についても，$l=1$ の場合と同様にやればよい。[3] 参照。

§4, 定理3の証明.

基本的な証明の方針は、定理1の証明の時と同じである。詳しく記していたら、非常に長くなるので、概略をのべようと思う。(1.3)'より

(4.1) $P(\tau,\xi,\eta)=\tau^{m-1}\xi-\sum_{i\leq m-2}a_{ij\alpha}\tau^{i}\xi^{j}\eta^{\alpha}$

$\equiv P_m(\tau,\xi,\eta)+P_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+R_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$

とおこう。P_m, P_{m-1}は夫々m次, $m-1$次の同次多項式, R_{m-2}は, $m-2$次の多項式である。(4.1)より. P_{m-1}の中のτ^{m-1}の係数は0である。さらに定理2より$P_m=\xi\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$である.

(4.2) $P_{m-1}=\xi Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)+\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)$

とおこう。ここでQ_{m-2}, $\mathring{P}_{m-1}$は夫々$m-2$次. $m-1$次の同次多項式である。これより.

(4.3) $P=\xi(\mathring{Q}_{m-1}+Q_{m-2})+\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)+R_{m-2}$

$\equiv\xi Q_{m-1}+\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)+R_{m-2}$.

証明したいことは, "$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)\neq 0$ならば, Goursat 問題は, $\mathcal{E}$-wellposedではない" ということである。$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)\neq 0$としよう。$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta^0)\neq 0$なる$\eta^0\in R^{\ell}$が存在する。$P_m+P_{m-1}$を主要部とみて, $P_m(\tau,i\xi,i\eta)+P_{m-1}(\tau,i\xi,i\eta)=0$の根を$\xi=\sqrt{\lambda}$, $\eta=\lambda\eta^0$ ($\lambda>0$, 十分大)の近傍で考えると, 次の補題を得る。

<u>補題4.1</u> $\mathring{Q}_{m-1}(\tau;\xi,\eta)=0$が$(\xi,\eta)\in R^1\times R^{\ell}$, $(\xi,\eta)\neq(0,0)$

に対して，実で相異なる根 $\{\lambda_i(\xi,\eta),\ 1\le i\le m-1\}$ をもつとする。さらに $\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta^0)\neq 0$ $\eta^0\in R^\ell$ とする。このとき，特性多項式

(4.4) $i\xi\mathring{Q}_{m-1}(\tau,i\xi,i\eta)+\mathring{P}_{m-1}(\tau,i\eta)=0$

の根 $\{\tau_i(\xi,\eta)\}_{1\le i\le m-1}$ は，つぎのような評価をもつ。

$$
(4.5)\quad
\begin{cases}
\mathrm{Re}\,\tau_i > \delta\sqrt{\lambda}, & 1\le i\le N_1,\quad N_1\ge 1,\ \delta>0. \\
|\mathrm{Re}\,\tau_i| \le C\ (\text{定数}) & N_1+1\le i\le N_2 \\
\mathrm{Re}\,\tau_i < -\delta\sqrt{\lambda} & N_2+1\le i\le m-1
\end{cases}
$$

$$(\xi,\eta)\in V_\lambda,\quad \lambda>0.\ \text{十分大}.$$

$V_\lambda=\{(\xi,\eta)\,;\ |\xi-\varepsilon_0\sqrt{\lambda}|<\varepsilon\sqrt{\lambda},\ |\eta-\lambda\eta^0|<\varepsilon\lambda\}$ ここで ε_0 は，+1 又は −1 で，そのどちらになるかは $\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)=0$ の根と，$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)$ によって決まる。

この補題の証明には，ピュイーズ展開を用いる。詳しくは[3]をみて下さい。　$\beta(x,y)$，$\alpha(\xi,\eta)$ を §2 で定義した関数として，$Pu=0$ に作用させると，

(4.6) $P[\alpha\beta u]=-\sum_{|\nu|\ge 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}[\alpha\,\beta^{(\nu)}u]$.

§2 では，$\alpha_n=\alpha(\frac{\xi}{n},\frac{\eta}{n})$ とおいたので，$n\longrightarrow\infty$ のとき，ξ,η 向の n の増大 order が同じであったが，ここでは，補題の V_λ を考慮して，ξ は $\sqrt{n}$ の order で，η は n の order で増大させよう。そのため，∂_t，∂_y の order を 1，∂_x の order を $\frac{1}{2}$ とみて，(4.6) の両辺の order をみてみよう。左辺の order

は，$m-1+\frac{1}{2}$ である．$\frac{\partial P}{\partial \xi}$ の order は $m-1$ である．右辺の他の項は，高々 $m-1-\frac{1}{2}$ である．したがって右辺の最も高い order の項は，$\frac{\partial}{\partial \xi}P[\alpha,\beta_x u]$ である．この項は，§2 と同じ方法では，取り扱えない．order が左辺（主要部）にくらべて 1 以上小さい項であるならば，同じ取り扱いができる．さて問題の項：$\frac{\partial}{\partial \xi}P[\alpha\beta_x u]$ は次のように処理する（溝畑先生の idea による）．

$$P = \xi Q_{m-1}(t,\xi,\eta) + \mathring{P}_{m-1}(t,\eta) + R_{m-2}(t,\xi,\eta)$$

であるから，

$$(4.7)\quad \frac{\partial}{\partial \xi}P = Q_{m-1} + \xi\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \xi}.$$

(4.6) で β を β_x でおきかえれば，

$$(4.8)\quad P[\alpha\beta_x u] = -\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}[\alpha(\beta_x)^{(\nu)}u].$$

$\alpha(\xi,\eta)$ の support の上で $\xi\neq 0$ とすれば，§2 と同様に $(i\xi)^{-1}(D)$ が定義できる（この order は $-\frac{1}{2}$ と考える）．これを使えば，

$$(4.9)\quad Q_{m-1}(\alpha\beta_x u) = -(i\xi)^{-1}(D)(\mathring{P}_{m-1}+R_{m-2})[\alpha\beta_x u]$$
$$-\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}(i\xi)^{-1}(D)P^{(\nu)}[\alpha(\beta_x)^{(\nu)}u].$$

ところで (4.6) と (4.7) より

$$P[\alpha\beta u] = \left[Q_{m-1} + \partial_x\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \xi}\right](\alpha\beta_x u)$$
$$-\sum_{|\nu|\geq 1}{}'\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}(\alpha\beta^{(\nu)}u)$$

である．ここで Σ' は $\frac{\partial}{\partial \xi}P$ なる項をふくまないものをあらわす．上式に (4.9) を代入すれば，

$$P(d\beta u) = -(i\xi)^{-1}(D)(\mathring{P}_{m-1} + R_{m-2})(d\beta_x u)$$
$$- \sum_{|\nu|\geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}(i\xi)^{-1}(D)P^{(\nu)}[d(\beta_x)^{(\nu)}u]$$
$$+ \left(\partial_x \frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \xi}\right)(d\beta_x u) - \sum_{|\nu|\geq 1}{}' \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}(d\beta^{(\nu)}u).$$

結局次の式を得る。

$$(4.10)\quad P(d\beta u) = \sum_{|\nu|\geq 1} C_\nu(\partial_t, \partial_x, \partial_y, (i\xi)^{-1}(D))(d\beta^{(\nu)}u).$$

左辺の order は $m-1+\frac{1}{2}$. 右辺は $m-1-\frac{1}{2}$. 以後(4.10)で $P_m + P_{m-1}$ を主要部, R_{m-2} を低階とみて, §2 の (2.16) に対応する式を求めるのである。§2 では方程式を system に直し, 主要部の行列を三角化したが, 今の場合, 三角化では, 非対角元の部分の評価がうまくゆかないので, 対角行列に直す。ここで仮定4 ($\mathring{Q}_{m-1}$ が強双曲型) が利いてくる。詳しくは[3]を参照.

§5. 定理4の証明.

定理の仮定より P は次の形をしていると考えてよい。

$$P(\tau, \xi, \eta) = \xi\mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + \xi\dot{Q}_{m-2}(\tau, \xi, \eta) + R_{m-2}(\tau, \xi, \eta)$$
$$\equiv \xi Q_{m-1} + R_{m-2}.$$

さらに, 一般性を失うことなく, Goursat data は0であるとしてよい。記述を簡略にするために, 記号を少し変えよう。$(x, y_1, \cdots, y_\ell)$ の代りに $(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell+1})$, $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_\ell)$ の代りに $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{\ell+1})$ と書こう。結局我々は, 次の Goursat 問題を考えよう。

$$(5.1)\quad Q_{m-1}\partial_{x_1}u = R_{m-2}u + f \qquad f\in\mathcal{E}_{t,x}$$

$$(5.2)\quad \begin{cases} \partial_t^i u(0,x)=0 & 0\le i\le m-2 \\ u|_{x_1=0}=0 \end{cases}$$

$$x=(x_1,x')=(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell+1}),\quad x\in R^{\ell+1}.$$

ここでQ_{m-1}はorder $m-1$の微分作用素であり，かつt方向に強双曲型である．R_{m-2}は$m-2$階の微分作用素である．逐次近似法によって定理を証明する。即ちV_0を

$$Q_{m-1}V_0=f,\ \partial_t^iV_0(0,x)=0 \qquad 0\le i\le m-2$$

の解とする。u_0を

$$\partial_{x_1}u_0=V_0,\quad u_0|_{x_1=0}=0$$

の解とする．一般に$j\geq 1$に対して，V_jは

$$(5.3)\quad Q_{m-1}V_j=R_{m-2}u_{j-1},\ \partial_t^iV_j(0,x)=0\ ,\ 0\le i\le m-2$$

の解であるとし，u_jを

$$(5.4)\quad \partial_{x_1}u_j=V_j,\quad u_j|_{x_1=0}=0$$

の解であるとする．我々は$u_0+u_1+\cdots$が収束することが示したい。　ここでGoursat問題の依存領域という概念を導入しよう．$\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi)=0$の根を$\lambda_i(\xi)_{1\le i\le m-1}$とする。$\lambda_{max}=\max\limits_{1\le i\le m-1,\,|\xi|=1}\lambda_i(\xi)$とおく。$\tilde{t}>0$とする．$\Omega(\tilde{t},\tilde{x})$を，backward cone；$\{(t,x);|x-\tilde{x}|\le\lambda_{max}(\tilde{t}-t)\}$で$t\geq 0$の部分とする．さらに$D(\tilde{t},r)=\bigcup\limits_{|x|\le r}\Omega(\tilde{t},x)$とする。ここで$D(\tilde{t},r)$を1つとり固定する。$D(\tilde{t},r)$と超平面$t=s\,(<\tilde{t})$

との共通部分をD(s)であらわす。次の2つの補題を得る。

<u>補題5.1</u>

$$(5.5)\quad \begin{cases} \partial_{x_1} u = v(t,x), & v(t,x) \in H^0_{loc} \\ u|_{x_1=0} = 0 \end{cases}$$

(5.5)の解はつぎの評価をもつ。

$$(5.6)\quad \|u(t)\|_{D(t)} \leq C_1 \|v(t)\|_{D(t)}.$$

ここで $\|u(t)\|^2_{D(t)} = \int_{D(t)} |u(t,x)|^2 dx$. C_1 はD(t)には依存するが，vには無関係な定数.

<u>補題5.2</u>

$$(5.7)\quad \begin{cases} Q_{m-1} v = g(t,x) & g(t,x) \in H^k_{loc} \\ \partial_t^i v(0,x) = 0, & 0 \leq i \leq m-2. \end{cases}$$

(5.7)の解は，つぎの不等式をみたす。

$$(5.8)\quad |||v(t)|||_{k,D(t)} \leq C_2 \int_0^t \|g(s)\|_{k,D(s)} ds. \quad k = 0,1,2,\cdots$$

ここで $\|g(s)\|_{k,D(s)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial_x^\alpha g(s)\|_{D(s)}$

$$|||v(t)|||_{k,D(t)} = \sum_{i=0}^{m-2} \|\partial_t^i v(t,x)\|_{m-2-i+k,D(t)}.$$

<u>Remark</u> 補題5.1で $\|\cdot\|_{D(t)}$ を $|||\cdot|||_{k,D(t)}$ でおきかえてもよい。

即ち<u>補題5.1′</u> $v(t,x) \in H^k_{loc}$ ならば，(5.5)の解はつぎの評価をもつ。

$$(5.6)'\quad |||u(t)|||_{k,D(t)} \leq C_1' |||v(t)|||_{k,D(t)}.$$

さて，上の補題の証明であるが，補題5.1は(5.5)の解が，具体的に積分の形で書き下せることにより，容易に示される。

補題5.2は、双曲型方程式の依存領域を考慮すれば、本質的には、[2] p338. 定理6.12と同じである。

さて、定理の証明であるが、$0 \le t \le T$, $M = \sup_{0 \le s \le T} \|f(s)\|_{k, D(s)}$ とおこう。補題5.1′と5.2より（R_{m-2}が$m-2$階の微分作用素であることを使って）

(5.9) $|||u_j|||_{k, D(t)} \le (C_1 C_2)^{j+1} C_3^{\,j} M t^{j+1}/(j+1)!$

を得る。ここでC_3はR_{m-2}の係数によって決まる定数。u_jを$\partial_t^i u_j$（iは任意）でおきかえても、(5.9)と類似の不等式が得られる。$D(t, r)$は任意であったから、$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$は広義一様に収束することがわかる。同様に任意のi, αに対して、$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_t^i \partial_x^\alpha u_k$も、$R^{\ell+1} \times [0, T]$で広義一様収束する。$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$とおけば、これはGoursat問題(5.1)-(5.2)の解であり、$u \in C_{t,x}^{\infty}$である。解の一意性についても、補題5.1′, 5.2を使って、容易に示される。詳しくは[3]をみて下さい。

§6. 補足—仮定3についての考察

仮定3で、P_mとP_{m-1}は実係数としたが、このうち、P_mについては、必要条件としてでてくるものである。

<u>命題6.1</u>　仮定1, 2の下で、Goursat問題(1.3)-(1.4)が$\mathcal{E}$-well-posedであるならば、主要部P_mの係数は実数である。（ここで、仮定2より、$\partial_t^{m-1}\partial_x$の係数を1と考える）

証明.

$$P=(\partial_x+\sum_{j=1}^{\ell}a_j\partial_{y_j}+c)\partial_t^{m-1}$$
$$-\{h_2(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-2}+h_3(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-3}+\cdots+h_m(\partial_x,\partial_y)\}$$

とおこう。ここで $h_j(\xi,\eta)$ は, (ξ,η) の j 次多項式である。命題を示すためには, "$\mathcal{E}$-wellposed ならば, a_j $(1\le j\le \ell)$ は実数である" が示されれば十分である。実際 a_j $(1\le j\le \ell)$ が実数であれば, §1 の注意1により, 方程式は(1.3)′に帰着でき, 定理1の証明がそのまゝ使えて, 特性根は実数であることが云える。これより P_m の係数は実数であることがしたがう。

さて, ある j $(1\le j\le \ell)$ があって, $\mathrm{Im}\,a_j\neq 0$ としよう。

$Pu=0$ なる u のうちで, (t,x,y_j) のみの関数を考えよう。簡単のために記号を少し変えて, つぎの方程式を考えよう。

$$(6.1)\quad Pu\equiv(\partial_x-a\partial_y)\partial_t^{m-1}u-\{h_2(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-2}+\cdots+h_m(\partial_x,\partial_y)\}u=0,\quad y\in R^1,\quad \mathrm{Im}\,a\neq 0.$$

$u=e^{i\eta(ax+y)}v(t,x)$ とおけば, v のみたす式は,

$$(6.2)\quad \partial_x\partial_t^{m-1}v=\{h_2(\partial_x+ia\eta,i\eta)\partial_t^{m-2}+\cdots+h_m(\partial_x+ia\eta,i\eta)\}v$$
$$\equiv\sum_{s=2}^{m}\sum_{p+q\le s}a_{spq}\partial_x^p\eta^q\partial_t^{m-s}v(t,x).$$

(6.2)の解でつぎのようなGoursat dataをみたすものを考えよう。

$$(6.3)\quad\begin{cases}\partial_t^i v(0,x)=0 & 0\le i\le m-2\\ v(t,0)=t^{m-1}/(m-1)!\,.\end{cases}$$

(6.2)−(6.3)の形式解を,

(6.4) $$v(t,x)=\sum_{j,k} v_{j,k}\frac{t^j x^k}{j!\,k!}$$

とおこう。(6.3)より、

(6.3)' $$\begin{cases} v_{j,k}=0 & j=0,1,\cdots,m-2,\quad k=0,1,2,\cdots \\ v_{m-1,0}=0, & \\ v_{j,0}=0 & j\neq m-1. \end{cases}$$

(6.4)を(6.2)へ代入すれば、

$$\sum v_{j,k}\frac{t^{j-m+1}x^{k-1}}{(j-m+1)!(k-1)!}=\sum_{s=2}^{m}\sum_{p+q\le s} a_{spq}\eta^q\sum_{j,k}\frac{t^{j-m+s}x^{k-p}}{(j-m+s)!(k-p)!}.$$

両辺の $t^\ell x^r$ の係数をくらべると、

(6.5) $$v_{\ell+m-1,r+1}=\sum_{s=2}^{m}\sum_{p+q\le s} a_{spq}\eta^q v_{\ell+m-s,r+p}.$$

(6.3)'と(6.5)より

(6.6) $$v_{m-1+\ell,k}=0 \qquad k>\ell\ge 0.$$

$k\le\ell$ なる項については、つぎの評価をうる。

(6.7) $$|v_{\ell+m-1,k}|\le AC^\ell\eta^{k+\ell}(k+\ell)! \qquad k\le\ell,$$ A, Cは定数。

(6.7)の証明は、$k=0$のときは、(6.3)'よりただちにしたがう。他の部分は、帰納法による。さて、(6.4)と(6.6)より、$v_{m-1,0}=1$を使えば、

(6.8) $$v(t,x)=\sum_{k\le\ell} v_{m-1+\ell,k}\frac{t^{m-1+\ell}x^k}{(m-1+\ell)!\,k!}$$
$$=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+\sum_{\ell\ge1}\sum_{k=0}^{\ell} v_{m-1+\ell,k}\frac{t^{m-1+\ell}x^k}{(m-1+\ell)!\,k!}.$$

上式才2項を、(6.7)を使って評価しよう。

$$\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell} AC^{\ell}\eta^{k+\ell}(k+\ell)!\,\frac{t^{m-1+\ell}\,x^{k}}{(m-1+\ell)!\,k!}$$
$$\leq \sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell} AC^{\ell}\eta^{k+\ell}2^{k+\ell}t^{m-1+\ell}x^{k}.$$

$x=x_0$で固定し，$C>1$，$\eta>1$ とすれば上式はつぎの式でおさえられる

$$A\cdot t^{m-1}\sum_{\ell\geq 1}C^{\ell}\eta^{2\ell}2^{2\ell}t^{\ell}(1+|x_0|)^{\ell}$$

(6.9) $\quad t < 1/4C\eta^2(1+x_0)$

のとき，上の級数は収束する。結局(6.9)をみたすもに対して

$$|v(t,x_0)|\geq t^{m-1}\left(1-\sum_{\ell=1}^{\infty}A\{4C\eta^2(1+|x_0|)t\}^{\ell}\right)$$

を得る。よって，例えば，$t_\eta=\dfrac{1}{8C\eta^2(1+|x_0|)\cdot A}$ ととれば，

(6.10) $\quad |v(t_\eta,x_0)|\geq M/\eta^{2(m-1)}.$

Mはηに無関係な正の定数．

さて，もとのuにもどれば，

(6.11) $\quad u=e^{ia\eta x+i\eta y}v$

であった。$\mathrm{Im}\,a\neq 0$ より，$a=a_1+ia_2$ $(a_2\neq 0)$とおこう。$-a_2x_0>0$ となるようにx_0をとろう。

(6.12) $$|u(t_\eta,x_0,y)|=e^{-a_2\eta x_0}|v(t_\eta,x_0)|$$
$$\geq e^{-a_2x_0\eta}M\eta^{-2(m-1)}.$$

一方(6.11)のuのみたすGoursat dataは，(6.3)より，

$$\begin{cases}\partial_t^i u(0,x,y)=0 & 0\leq i\leq m-2\\ u(t,0,y)=e^{i\eta y}t^{m-1}/(m-1)!\end{cases}$$

であるから，$\mathcal{E}$-well posedの仮定より，解はηに関して，高

く多項式の増大 order をもつ。これは(6.12)に矛盾する。

次にP_{m-1}が実係数であるという仮定について考えてみよう。

<u>仮定3'</u>　P_mの係数は実数である。

<u>命題6.2</u>　仮定1, 2, 3', 4の下で，Goursat問題が$\mathcal{E}$-well posedならば，

$$\mathrm{Re}\, P_{m-1}(\tau,\xi,\eta) = c\,\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + b_1(\xi,\eta)\,Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$$

である。即ち，定理3がP_{m-1}の実部についてなりたつ。

証明は，定理3のそれをたどってみればよい。$\mathrm{Im}\, P_{m-1}$についてはどうであろうか，簡単な例で説明しよう。

(6.13)　$\partial_t \partial_x u = i\partial_y u$

特性多項式(4.4)は今の場合

$$\tau(i\xi) = i\cdot i\eta$$

したがって $\tau = i\dfrac{\eta}{\xi}$ となり，$\mathrm{Re}\,\tau = 0$ であるから，補題4.1はなりたたない。即ち，$\mathrm{Im}\, P_{m-1}$については定理3の証明は全く通用しないのである。もっとも，(6.13)については，定理3の証明とは別の方法で$\mathcal{E}$-wellposedでないことが示される。実際

(6.14)　$u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta x t)^n}{(n!)^2} e^{i\eta y}$

は，(6.13)をみたす。$u(0,x,y) = u(t,0,y) = e^{i\eta y}$ であるから，Goursat問題が$\mathcal{E}$-wellposedとすれば，解はη

の多項式orderでおさえられなければならない。しかし(6.14)より、多項式orderではおさえられないことがわかる。よって、(6.13)は$\mathcal{E}$-well posedではない。

参照文献

[1] S. Mizohata. Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. vol 1. No1, 1961. p.109 — p127

[2] 溝畑茂 偏微分方程式論 岩波 (1965)

[3] Y. Hasegawa. On the C^∞-Goursat problem for equations with constant coefficients. to appear in J. Math. Kyoto Univ.